Математическая биржа 91

кандидат физико-математических наук
Тоболкин Антон Александрович

tobantal@gmail.com

http://vkontakte.ru/id16227878

16.01.2010

Глава 1

Концепция Математической биржи

1.1 Введение

Для кого предназначено это электронное пособие? В первую очередь, оно рассчитано на детей, участвующих в игре "Математическая биржа". Во вторую очередь – для педагогов, методистов и родителей.

В современной России накопилось огромное количество проблем, которое общество не успевает решать. Поэтому, главная миссия школы – научить детей решать **реальные проблемы**. Для этого необходимо развить у обучающегося три основных класса показателей, влияющих на успех в решении любой проблемы.

1. Теоретическая сила – всё то, что может продемонстрировать обучающийся в идеальных для него условиях (зависит от вида проблемы). Сюда входят всевозможные знания, умения, навыки, компетентности и пр.
2. Психологическая подготовка (ПП): умение преодолевать страх, "подняться после падения", выносливость, принятие ответственных решений и т.д.
3. Адекватность – умение выбирать правильные действия, исходя из самооценки своих способностей и возникшей ситуации.

1.2 Немного истории

На протяжении нескольких лет в Томской области мною проводились тестирования широко известных математических игр на актуальность, надёжность, точность и достоверность результатов. Исследования показали, что "Математические бои" не соответствуют современным требованиям надёжности, т.к. малая судейская ошибка может привести к серьёзным изменениям в расстановке команд; в "Каруселях" часто бывает, что команды, имеющие разные силы, по результатам игры получают одинаковое количество баллов; "Регаты" дают более точную оценку сил команд, чем "Карусели", но они слишком затратные в плане организации: требуют огромного количества профессионально подготовленных судей. В результате было принято решение о создании эффективной игры нового поколения: более надеждой, с простыми и прозрачными правилами, с продуманной системой защиты от сбоев и быстрого восстановления в случае их возникновения, которая бы давала актуальные достоверные данные.

Игра получила название "Математическая биржа" – в ней участникам игры приходится торговать математическими задачами. Основная идея заключается в том, что вместе с ответом на конкретную задачу команда делает ставку, в которой численно выражает свою уверенность в правильности ответа. Далее, в зависимости от того правильно или нет ответила команда и насколько она была уверена в своём ответе будет меняться цена команды.

Благодаря идеи "в ответ вкладывать уверенность" было разработано два направления:
1) командная игра 1.3;
2) индивидуальное тестирование.

Первое направление больше рассчитано на обучение, второе – на высокоточное тестирование.

Математическая биржа конструировалась с учётом всех выявленных дефектов известных и широко распространённых математических игр. В игре заложены большие запасы гибкости (для модернизации) и надёжности (для защиты от судейской ошибки). Последняя модификация (см. 1.3) обеспечивает игру ещё большей надёжностью, т.к. любую судейскую ошибку теперь можно исправить в любое время, даже после окончания игры (см. отчёты на www.aclic.tomsk.ru).

Отметим, что основная цель "Математических боев", "Каруселей" и "Регат" - линейное упорядочивание команд по силам. Однако задача линейного упорядочивания совокупности команд по силам в общем случае не корректна, т.к. структура порядка этой совокупности может быть не линейной. Например, в "Математических боях" для линейного упорядочивания команд по силам используется аксиома транзитивности: если команда a сильнее команды b (a>b), а команда b сильнее команды c (b>c), то из этого следует, что команда a сильнее команды c (a>c). Проблема заключается в том, что существуют структуры, в которых аксиома транзитивности не работает. Рассмотрим простую игру "Камень-Ножницы-Бумага". Камень (К) сильнее ножниц (Н), ножницы сильнее бумаги (Б), но из этого не следует, что камень сильнее бумаги. Если из множества (К,Н,Б) выбрать пару, то всегда можно определить сильного и слабого, например, в паре (Н,Б) Н сильнее Б, но само множество (К,Н,Б) в данном случае линейно не упорядочивается. На самом деле, на множестве (К,Н,Б) задана циклическая структура порядка. Понятно, что для структур, элементами которых являются группы людей, всё намного сложнее. Поэтому цель "Математической биржи" – это многомерное упорядочивание команд по силам. Например, две команды A и B могут быть по каким-то координатам равны, по какой-то координате A может быть сильнее B, а по какой-то слабее.

1.3 Правила игры Математическая биржа

Математическая БИРЖА – это командная игра по решению математических задач. Состав команды – ровно 6 человек. Команда решает задачи в любом порядке, но сдавать должна в порядке протокола, причём по одной в порядке живой очереди. Пусть a(n) – цена команды после решения n-ой задачи (полагаем стартовую цену a(0)=10A), где A – условная единица торговли. Задачи выдаются все сразу на одном листе, который также исполняет роль протокола. Если команда считает, что у неё есть решение на n-ую задачу, то в своём протоколе она указывает ответ, а также делает ставку – целое число баллов, которое не должно превосходить цены команды. Далее один из членов команды предоставляет протокол судье, который оценивает правильность этого ответа (в сложных и спорных случаях советуется с другими судьями) и указывает цену. Если ставка равна нулю, то это равносильно отказу от задачи, и тогда цена команды не меняется. Возвращаться к задачам, от которых команда отказалась, нельзя! Если ставка больше нуля, то в случае правильного ответа цена команды увеличится на эту ставку, в случае неправильного – уменьшится на эту ставку. В общем случае ответ считается правильным, если указаны все варианты ответа и не указано ни одного лишнего.

Пример задачи 1. Найти вещественные корни уравнения

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0.$$

Пусть команда указала в ответе 1 и $-\frac{1}{2}$, а также сделала ставку 7A. Затем судья проверяет ответ. В данном случае ответ верный, поэтому цена команды равна a(1)=17A. Если на второй задаче ставка равна 4A, и ответ оказался неверным. Тогда a(2)=17A-4A=13A.

Теперь рассмотрим подробнее, что происходит с командами банкротами. Изначально все команды находятся в представительском классе "A". Если команда обанкротилась, то она начинают игру заново, т.е. с 10 баллами, но уже в менее престижном классе "B". Если команда снова обанкротилась, то она получает 10 баллов, но уже в классе "C". Каждый следующий класс менее престижный, чем предыдущий. В классе "A" единицей торговли выступает A, в классе "B" соответственно B и т.д. Значимость B бесконечно мала по сравнению со значимостью A, т.е. сколько бы команда не набрала баллов в классе "B", её цена всегда будет меньше A. Аналогично, значимость C бесконечно мала по сравнению со значимостью B. Например, на третей задаче команда пошла ва-банк (поставила все баллы) и обанкротилась из-за того, что ответ оказался неверным. Тогда вместо a(3)=0A, полагаем a(3)=10B. Далее команда продолжает игру, но уже в другом статусе – классом ниже. Пусть ставка на задачу 4 равна 6B, и задача решена верно. Тогда a(4)=16B. Допустим, что дальше команда развивалась следующим образом: a(5)=20B, a(6)=18B, а на 7 задаче опять обанкротилась. Тогда полагаем a(7)=10C. Команда снова начинает игру заново, но в качестве единицы торговли выступает уже C, т.е. ставка на 8 задаче одно из следующих чисел: 0,C,…,9C,10C. Пусть a(8)=15C, a(9)=12C и т.д.

Игра для конкретной команды заканчивается в следующих случаях:

1) закончилось отведённое на игру время;
2) закончились задачи;
3) команда дисквалифицирована за нарушение дисциплины.

Команде запрещается нарушать дисциплину (мусорить, громко разговаривать, шуметь, отвлекать и оскорблять представителей других команд, судей и т.п., а также пользоваться калькуляторами, ноутбуками, сотовыми, справочниками и т.д.).

Судья обязан разъяснять правила игры, права и обязанности всех участников игрового процесса, координировать игру внутри кабинета, отвечать на вопросы, касающиеся условия задач, игнорировать вопросы, касающиеся решения. Например, команда может спросить, в каком виде записать ответ. Вопросы типа, "правильно ли мы провели те или иные преобразования", судьёй игнорируются.

После того, как игра для команды закончилась, судья изымает протокол, проверяет правильность заполнения и, если всё нормально, ставит свою подпись. Если нет – возвращает протокол на доработку.

1.3.1 Сравнение команд по силам

Несмотря на то, что цель Математической биржи – многомерное упорядочивание команд по силам, мы все равно продолжаем (по разным причинам) линейно упорядочивать команды для расстановки мест и выдачи дипломов.

Если команды по окончанию игры находятся в одном классе, например, "C", то сильнее та команда, у которой больше баллов. Если команды в разных классах, то сильнее та, у которой класс более престижный.

Пример. 100A>87A, 122A>122B, 3A>1000C, 17C<22C.

1.3.2 Надёжность

Прежняя система правил (когда обанкротившаяся команда покидала игру) давала защиту почти от всех ошибок, кроме фатальных судейских ошибок. Фатальная ошибка судьи – это когда команда решила задачу правильно и поставила все баллы на неё, а судья неправильно оценил ответ, т.е. команда обанкротилась по вине судьи. Благодаря новой системе, любую судейскую ошибку можно исправить. Поясним на вышеизложенном примере. Допустим, после игры выяснилось, что судья ошибся при оценке ответа в задаче 3. Тогда перерасчёт баллов происходит в процентном отношении: a(3)=26A, a(4)=41.6A, a(5)=52A, a(6)=46.8A, далее a(7)= 10B, a(8)=15B, a(9)=12B, т.е. статус команды, после перерасчёта, возрастает на класс. Надо отметить, что если судья переоценил команду, то происходит также перерасчёт в процентном отношении, но уже не в пользу команды.

1.4 Миссия игры

Миссия игры "Математической биржи" заключается в том, чтобы научить детей принимать правильные решения в условиях неопределённости и ограниченности времени. Задачи игры направлены на развитие интуиции и умений правдоподобно рассуждать. Эти навыки необходимы при решении реальных проблем. В игре используются скрытые формы обучения, например, принуждение к обмену способностями.

1.5 Фатальные ошибки

Философия игры основана на том, что в реальной жизни существуют неисправимые ошибки. В "Математической бирже" фатальная ошибка – это банкротство, после которого команда продолжает игру, но исправить совершённую ошибку она уже не сможет ни за какой промежуток времени, ни при каких усилиях.

1.6 Правдоподобные рассуждения

Обычно в школе не уделяют должного внимания правдоподобным рассуждениям, несмотря на то, что при решении реальных проблем они используются чаще, чем строгие рассуждения. Строгие рассуждения дают 100% точность, но слишком долгие. Правдоподобные – не очень точны, зато очень быстрые. При решении реальных экстремальных проблем скорость часто становится важнее точности.

Глава 2

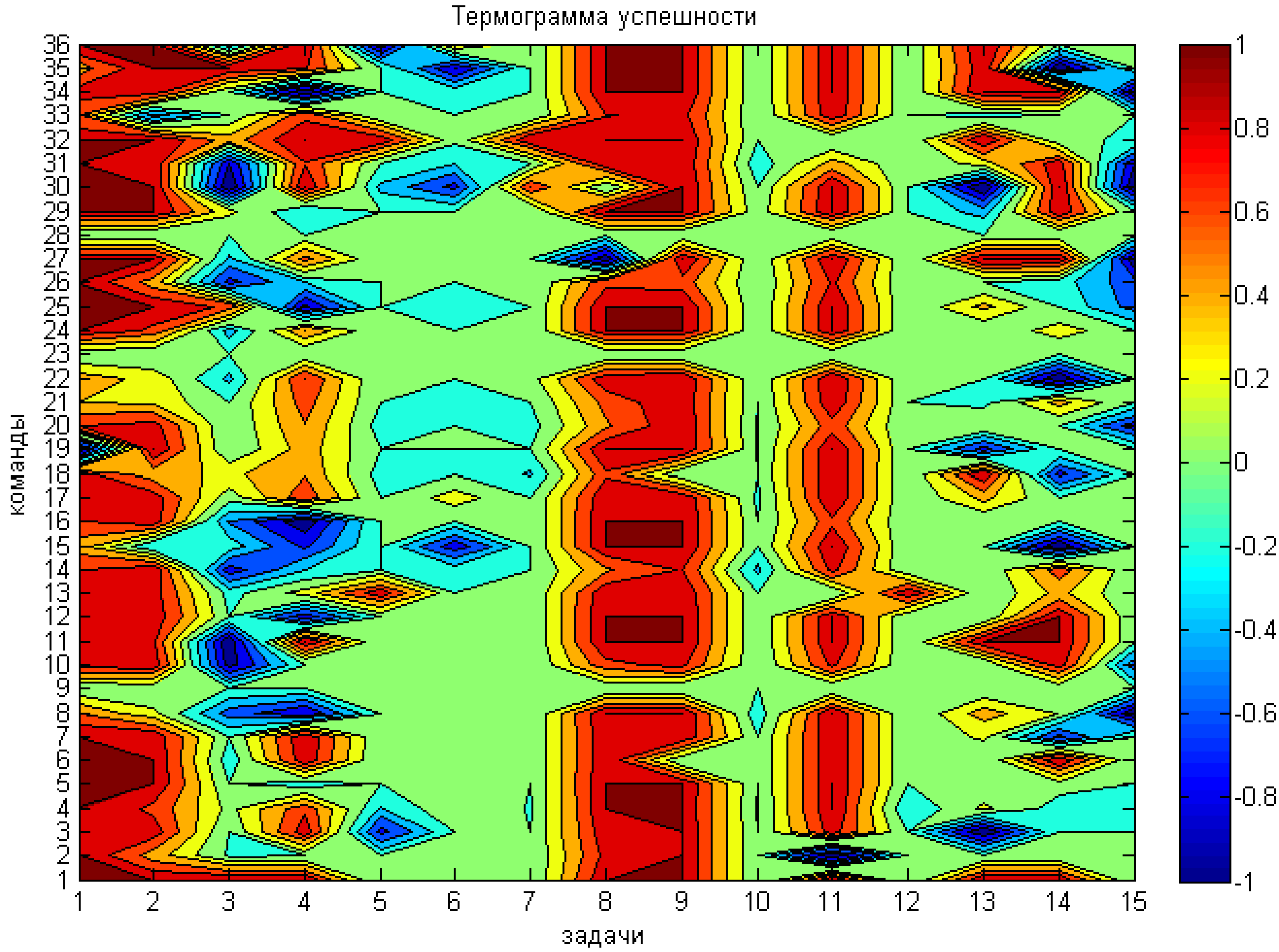
Аналитический отчёт Математической биржи 91 (16.01.2010)

2.1 Сводная таблица

№	шифр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	M
1	АЛ-1	20	40	80	160	160	180	180	360	720	720	1440	1440	2880	5760	5760	1
2	К-1	20	30	29	29	29	29	29	54	108	108	10B	10B	10B	10B	10B	27
3	Г55-1	20	38	38	73	23	23	23	45	90	90	170	170	10B	10B	10B	27
4	Г6-1	20	35	40	70	55	65	64	128	256	252	504	404	504	454	404	8
5	Г29-1	20	40	40	35	35	35	35	70	140	140	280	280	280	300	300	9
6	Г1-1	20	40	35	68	68	68	68	134	134	134	267	267	267	533	533	5
7	АЛ-2	20	39	39	77	77	77	77	153	305	305	609	609	759	259	259	11
8	Ш22-1	16	20	10	2	2	2	2	4	8	7	14	14	21	25	10B	27
10	Г55-2	19	37	4	4	4	4	4	7	13	13	24	24	24	46	21	20
11	Г29-2	19	35	1	2	2	2	2	4	8	8	16	16	32	64	64	16
12	Г1-2	20	39	39	10	10	10	10	20	40	40	80	80	80	160	160	12
13	АЛ-3	19	36	33	43	83	83	83	163	323	323	323	643	643	943	943	4
14	Ш22-2	18	35	10	8	8	7	7	11	20	15	28	28	28	48	48	17
15	Ш2-2	15	12	11	4	4	1	1	2	4	4	8	8	8	10B	10B	27
16	Г6-2	18	35	20	1	1	1	1	2	4	4	7	7	7	7	7	22
17	Г1-3	19	36	39	68	68	88	88	173	343	328	653	653	953	953	953	3
18	Ш49-1	19	28	38	60	55	54	42	74	74	74	147	147	293	93	93	13
19	Ш19	10B	20B	20B	30B	30B	30B	30B	60B	120B	119B	238B	238B	80B	80B	80B	26
20	Г29-3	18	34	34	54	50	50	46	72	142	140	240	240	280	280	80	15
21	Г2-1	14	19	19	32	32	31	31	52	102	102	200	200	190	280	280	10
22	Г13	15	20	15	27	27	27	30	58.2	115.2	115.2	229.2	229.2	229.2	1.2	1.2	23
24	Г1-4	20	35	25	40	40	40	40	80	160	160	320	320	320	420	420	7
25	ЮШ6	20	40	70	10	10	8	8	16	32	32	64	64	94	94	47	18
26	К-2	20	30	10	8	8	8	8	14	24	24	44	44	44	39	18	21
27	Г2-2	20	40	30	50	50	50	50	2	4	4	8	8	16	32	1	24
29	Г1-5	20	40	50	40	40	40	40	80	160	170	340	340	240	470	470	6
30	Г26-2	20	40	10B	20B	15B	5B	9B	9B	18B	18B	36B	36B	10C	20C	10D	29
31	ЮЛ	20	39	8	14.3	14.3	11.4	11.4	22.3	44	38.3	57.14	57.14	74.3	142.9	28.6	19
32	АЛ-4	20	40	60	120	235	245	485	970	1940	1940	1940	1940	3870	3970	3900	2
33	Ш2-1	16	8	8	14	14	14	14	25	47	47	92	92	84	84	84	14
34	Г1-6	19	37	37	10B	10B	9B	9B	18B	36B	36B	72B	72B	144B	288B	10C	28
35	Г26-1	15	30	60	110	110	20	20	40	80	80	160	160	310	10B	10B	27
36	Ш49-2	20	40	25	50	10B	15B	15B	30B	60B	60B	120B	120B	240B	245B	245B	25

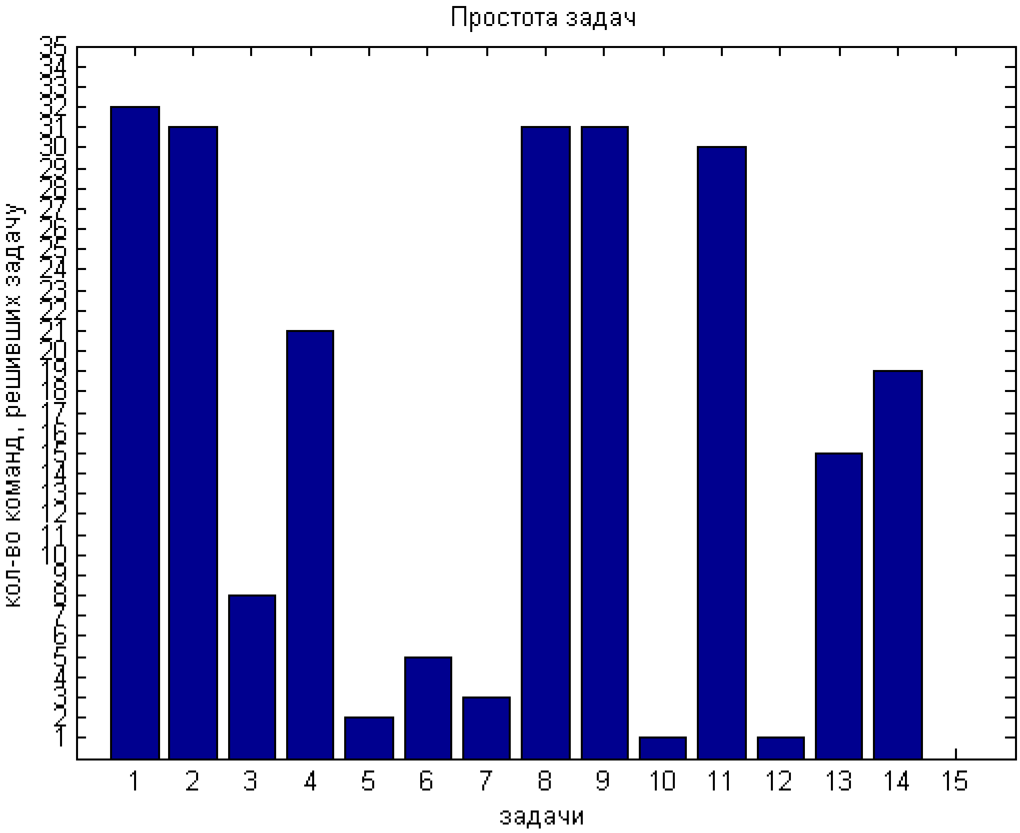
У нескольких команд был произведён перерасчёт баллов из-за судейских ошибок.

2.2 Термограмма успешности



Термограмма демонстрирует приблизительно одинаковый уровень подготовки команд 9-х классов. Существенные отклонения только в 4 и 14 задачах. Результаты по решению 4 задачи демонстрируют неумение 1/3 всех команд читать информацию с графиков. Задачу № 14 решили только 18 команд из 33 участвовавших, хотя эта задача элементарно решается с использованием теоремы Пифагора. В основном команды набирали баллы на простых задачах. Выявились существенные недочёты в арифметике и геометрии. Дети в абсолютном большинстве не знают элементарной арифметики за 6 класс: основную теорему арифметики, алгоритм Евклида, свойства наибольшего общего делителя и т.д. Учителя совсем не занимаются с детьми **исследовательскими задачами**, в лучшем случае решают сложные олимпиадные задачи. Исследовательскую 6 задачу решили только 5 команд, хотя такая задача обычно предлагается 6-7 классам, которые намного успешнее с ней справляются. Некоторые команды ошибаются в элементарных арифметических действиях: $-12+7+7=3$. Никто не решил последнюю 15 задачу. Она сложная, но вполне решаема в несколько шагов с использованием теоремы Виета. Большинство команд не справляется со стандартной школьной программой, не говоря уже о дополнительных продвинутых теориях.

2.3 Простота задач



Отметим, что 10 и 12 задачи оказались уникальными, т.е. их решили по одной команде: 10 задачу с успехом чуть более 6% решила команда Г1-5, 12 задачу со 100% успехом решила команда АЛ-3. Задача № 15 оказалась нерешённой.

2.4 Детальный отчёт по некоторым командам

В этой главе я не стал комментировать игру всех команд, а остановился только на трёх лицейских. Во-первых, эти дети готовы к тому, чтобы адекватно воспринимать подобную информацию. Во-вторых, пользуясь своими правами организатора, могу предоставлять дополнительную информацию по своему усмотрению.

2.4.1 АЛ-1

Команда Академического лицея, участвовавшая под номером 1, по иронии судьбы, стала первой. На графике 2.1 видно, что команда не совершила ни одной ошибки – все производные коэффициенты неотрицательны. Все это говорит о 100% адекватности команды. Что касается психологической подготовки, то у них всё в порядке. Были не уверены в 6 задаче (слишком маленькую сделали ставку), за счёт чего показатель психологический подготовки упал с 1 до 0.56. Команда чётко знает свои силы и выбирает действия согласно своим умениям. Команда имеет очень высокий коэффициент надёжности, что говорит о готовности участников решать многие реальные проблемы. Рассмотрим стандартные характеристики этой команды.

М	А	ПП	Вес	к.р.з.
1	1	0.5625	0.6562	10

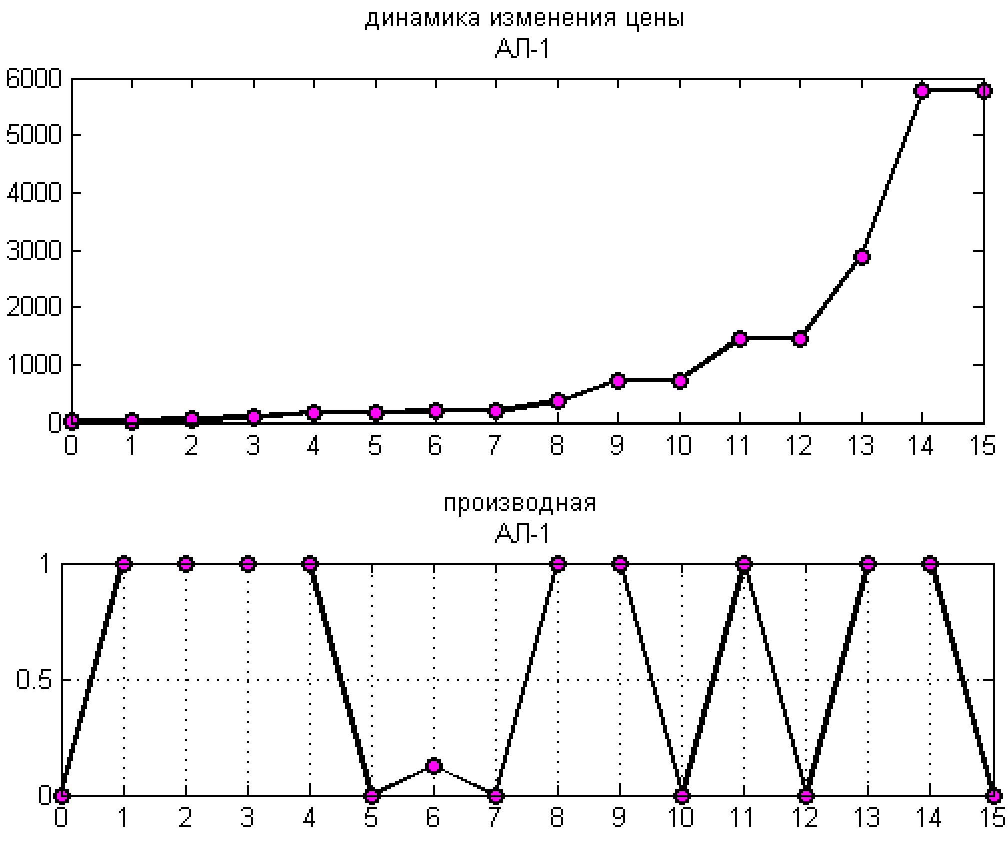


Рис. 2.1: график изменения цены команды АЛ-1

2.4.2 АЛ-3

Команда АЛ-3 уникальна в том плане, что она со 100% успехом решила 12 задачу, которую никакая другая команда осилить не смогла. Этот факт отразился на весе команды.

М	А	ПП	Вес	к.р.з.
4	0.9167	0.4018	1.7312	8

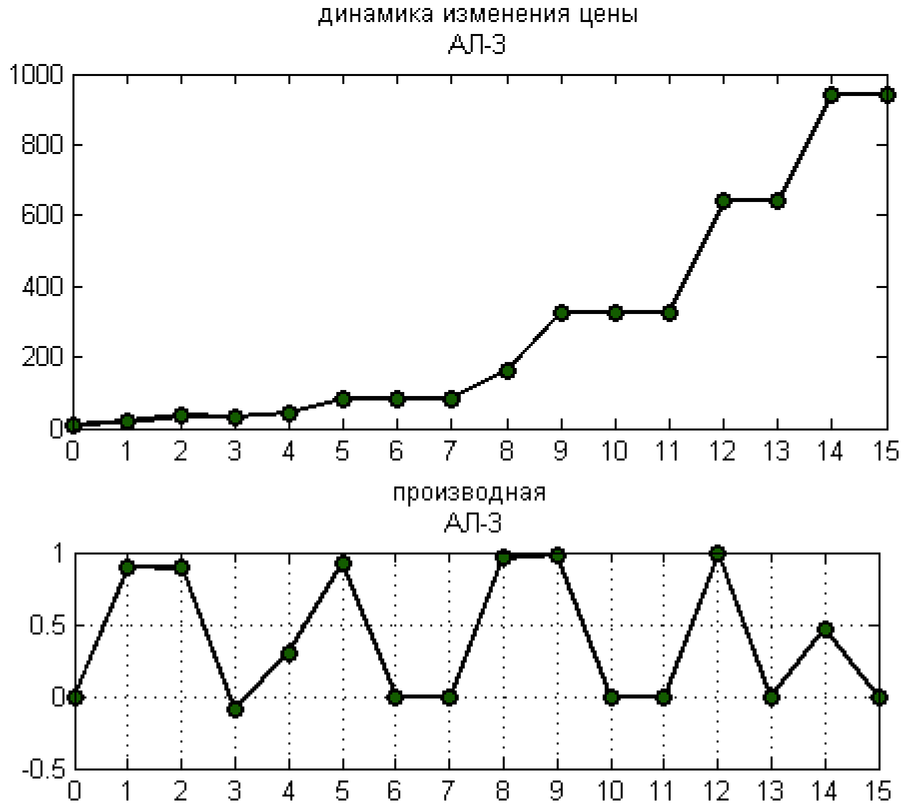


Рис. 2.2: график изменения цены команды АЛ-3

2.4.3 АЛ-4

Об этой команде нужно отдельно сказать несколько слов. Во-первых, команда появилась в самый последний момент. Учитель не оценил их по достоинству и не стал подавать заявку на участие этой команды. Дети самостоятельно организовались, дождались нужного момента и зарегистрировались, когда стало известно, что команда Г2-3 не приедет. Во-вторых, команда участвовала неполным составом: 4 человека из 6. Однако эти неблагоприятные условия не повлияли на стремление команды к победе. В результате команда заняла второе место, набрав 3900 баллов в классе А. Победа достаётся тому, кому она больше нужна!

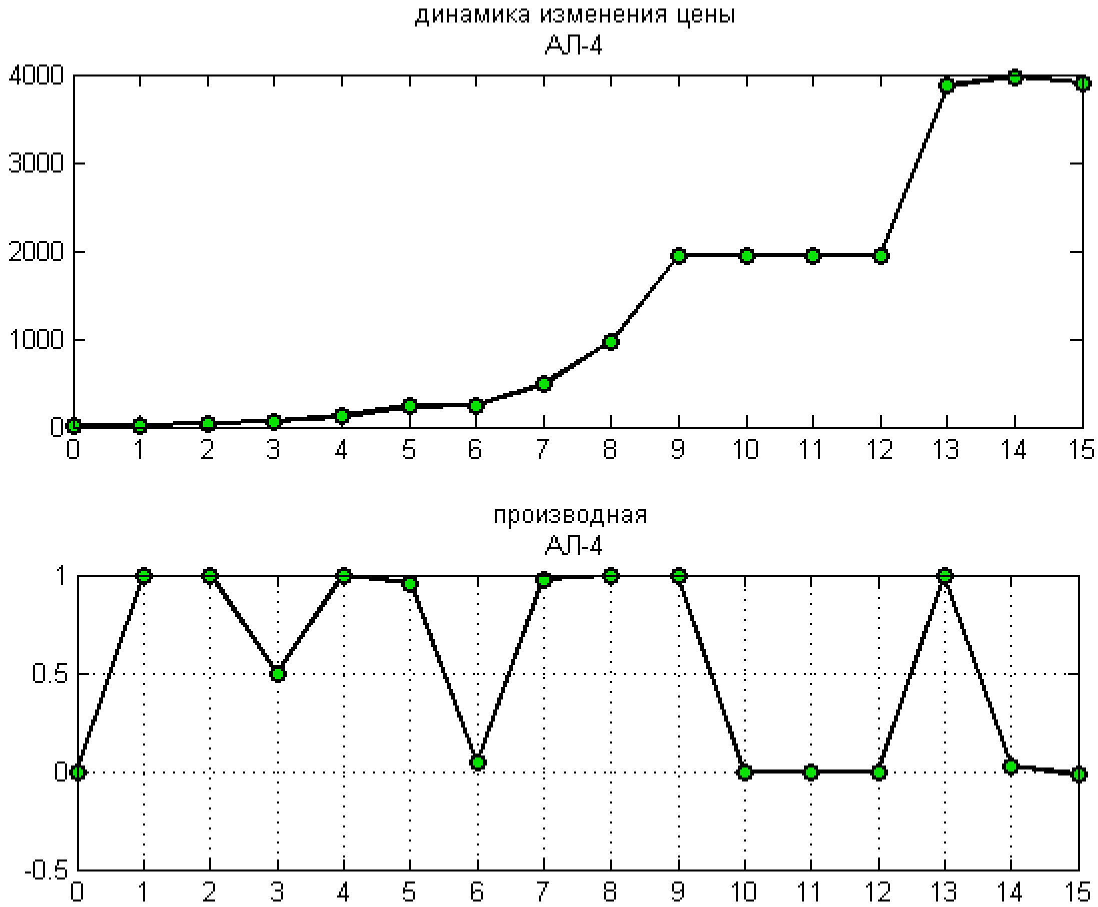


Рис. 2.3: график изменения цены команды АЛ-4

Глава 3

Заключение

3.1 Об оценке способностей

Команда АЛ-4 своими действиями показала, что учителя не умеют правильно оценивать своих учеников. Обычно, когда начинается семинар по разбору задач, среди учителей начинается гул: "Наши дети это не изучали, они ничего не решат". После игры выясняется, что дети спокойно решили эти "нерешаемые" (с точки зрения учителей) задачи.

Для оценки уровня подготовки учителей было принято решение о проведении игры среди преподавателей. Эта игра поможет учителям понять зачем всё это нужно.

3.2 Самая страшная эпидемия

Какая самая страшная эпидемия для человечества? Многие подумают, что это СПИД, РАК или Свиной грипп. Однако все болезни мира не уносят столько жизней, сколько одна – опрометчивость. Опрометчивость является причиной большинства ДТП и катастроф. Достаточно небольшой группы опрометчивых людей во главе государства для того, чтобы бессмысленно погибли тысячи людей. Ярким примером являются действия правительства Гаити, которое знало о предстоящем землетрясении, но не предприняло никаких действий. По предварительным данным погибли более 100 тысяч людей. Для сравнения за всё время эпидемии свиного гриппа A/H1N1 число жертв в мире составило менее 12.5 тысяч (по данным Всемирной организации здравоохранения).

Американские учёные, обнаружившие тревожные признаки нарастания напряжения в разломе Энрикильо, которое привело к разрушительному землетрясению на Гаити, предупреждали об этом ещё два года назад. Свои выводы они представили на геологической конференции в марте 2008-го и на встрече с гаитянскими властями два месяца спустя. Прогноз сейсмологов гласил, что страну ожидает землетрясение силой 7.2 балла. Время показало, что они переоценили опасность всего на две десятых. Можно ли было за два года предотвратить катастрофу? За это время можно было психологически подготовить население, укрепить здания и т.д. Надо понимать, что **катастрофы не всегда возникают по вине человека, но человек всегда определяет степень катастрофы**.

Как возникает опрометчивость, как с ней бороться? Почти все школьные программы во всех странах мира направлены на развитие теоретической силы. Если педагог по каким-то "специальным" технологиям и развивает у детей психологическую подготовку, то это происходит исключительно за счёт ухудшения адекватности. Например, детям внушают, что они "всё могут". В результате, вместо того, чтобы оценивать риски и принимать правильные решения, дети "смело рвутся в бой". Как следствие, у обучающихся появляется серьёзное заболевание – опрометчивость (высокий показатель ПП и низкий показатель адекватности). Такие дети склоны к совершению фатальных ошибок – ошибок, которые невозможно исправить ни при каких усилиях, ни за какой промежуток времени. Опрометчивость лечится путём улучшения адекватности.

"Математическая биржа" – первая в мире игра, позволяющая с высокой точностью оценить уровень

Рис. 3.1: последствия землетрясения на Гаити

адекватности, а скрытые формы обучения, направленные на принуждение к развитию способностей, позволяют улучшать показатель адекватности. Стоит отметить, что развитие адекватности происходит не за счёт ухудшения психологической подготовки.

Сейчас математику нужно рассматривать ни как *царицу наук*, а как *лекарство от опрометчивости*.

Данное электронное пособие находится в свободном доступе на официальном сайте МОУ Академического лицея г.Томска *www.aclic.tomsk.ru*.