ОГБУ «Региональный центр развития образования»
Федеральная инновационная площадка Минпросвещения России
МБОУ Академический лицей г. Томска имени Г.А. Псахье
Межмуниципальный центр по работе с одаренными детьми «Центральный»

XXIX открытая научно-практическая конференция школьников им. В.Е. Зуева по междисциплинарной теме «Конвергенция: познание без границ»

Исследовательская работа на тему: «ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ»

Выполнила: Клочкова Оксана, ученица 10 класса альфа
МБОУ Академического лицея им. Г.А. Псахье, г. Томск
Руководитель: Фомина Наталья Михайловна
учитель математики

г. Томск 2023 г.

Оглавление

1. Введение

Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Одним из больших и важных тематических разделов в математике являются иррациональные уравнения и неравенства. В начале изучения иррациональных уравнений в основной школе вводятся понятия иррационального числа, арифметического корня.

Трудности при изучении данного вида уравнений и неравенств, связаны со следующими особенностями:

1. Отсутствие четкости алгоритма (необходимы логические рассуждения0
2. При решении уравнения данного вида приходится делать преобразования, вследствие чего допускаются ошибки, которые чаще связаны с потерей или приобретением посторонних корней.

Следует учесть, что почти каждый вариант заданий ГИА содержит не менее 2-х заданий по данной теме.

Цель работы: научиться решать иррациональные уравнения и неравенства, освоить все методы их решения.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Изучить историю возникновения иррациональных уравнений и неравенств
- Подобрать теоретический материал, связанный с равносильностью уравнений и неравенств, равносильностью преобразований, методами решения иррациональных уравнений и неравенств;
- Показать, как общие методы решения уравнений применимы для решения иррациональных уравнений и неравенств;
- Подобрать примеры решения иррациональных уравнений и неравенств для демонстрации излагаемой теории.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре и началам анализа школьников в 10-11 классах.

Предмет исследования: различные виды иррациональных уравнений и неравенств и методы их решения.

Гипотеза исследования: применение разработанной методики решения иррациональных уравнений и неравенств позволит учащимся решать иррациональные уравнения и неравенства на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный метод, применять разные методы решения, в том числе те, которые не рассмотрены в школьных учебниках.

2. История возникновения иррациональных уравнений

Термин «рациональное» (число) происходит от латиноамериканского слова ratio - отношение, которое является переводом греческого слова “логос”в отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными, т.е. нерациональными (по-гречески “алогос”) правда, первоначально термины “рациональный” и “иррациональный” относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно не соизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми, Теодор Киренский же симметричными и ассимметричными. В V-VI вв. римские авторы Капелла и Кассиодор переводили эти термины на латынь словами rationalis и irrationalis. Термин «соизмеримый» (commensurabilis) ввел в первой половине VI в. другой римский автор- Боэций.

Древнегреческие математики классической эпохи пользовались только рациональными числами (вернее целыми, дробными и положительными). В своих «Началах» Евклид излагает учение об иррациональностях чисто геометрически.

Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, развивая алгебру, тригонометрию и астрономию, не могли обойтись без иррациональных величин, которые, однако, длительное время не признавали за числа. Греки называли иррациональную величину, например, корень из квадратного числа, «алогос» - невыразимое словами, а позже европейские переводчики с арабского на латынь перевели это слово латинским словом surdus - глухой. В Европе термин surdus- глухой впервые появился в середине XII в. у Герарда Кремонского, известного переводчика математических прозведений с арабского на латынь, затем у итальянского математика Леонардо Фабоначчи и других европейских математиков, вплоть до XVIII в. Правда уже в XVI в. Отдельные ученые, в первую очередь итальянский математик Рафаэль Бомбелли и нидерландский математик Симон Стевин считали понятие иррационального числа равноправным с понятием рационального числа. Стевин писал: «Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью.»

Еще до Бомбелли и Стевина многие ученые стран Среднего Востока в своих трудах употребляли иррациональные числа как полноправные объекты алгебры. Более того, комментируя «Начала» Евклида и исследуя общую теорию отношения Евдокса, Омар Хайям уже в начале XII в. теоретически расширяет понятие числа до положительного действительного числа. В том же направлении много было сделано крупнейшим математиком XIII в. ат-Туси.

Математики и астрономы Ближнего и Среднего Востока вслед за астрономами древнего Вавилона и эллинистической эпохи широко пользовались шестидесятеричными дробями, арифметические действия с которыми они называли «арифметикой астрономов». По аналогии с шестидесятеричными дробями самаркандский ученый XV в. ал-Каши в работе «Ключ арифметики» ввел десятичные дроби которыми он пользовался для повышения точности извлечения корней. Независимо от него по такому же пути шел открывший в 1585 г. десятичные дроби в Европе Симон Стевин, который в своих «приложениях к алгебре» (1594 г.) показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечно близкого приближения к действительному числу. Таким образом, уже в XVI в. зародилась идея о том, что естественным аппаратом для введения и обоснования понятия иррационального числа являются десятичные дроби. Появление «Геометрии» Декарта облегчило понимание связи между измерением любых отрезков (и геометрических величин вообще) и необходимости расширения понятия рационального числа. На числовой оси иррациональные числа, как и рациональные, изображаются точками. Это геометрическое толкование позволило лучше понять природу иррациональных чисел и способствовало их признанию.

В современных учебных руководствах основа определения иррационального числа опирается на идеи ал-Каши, Стевина и Декарта об измерении отрезков и о неограниченном приближении к искомому числу с помощью бесконечных десятичных дробей. Однако обоснованием свойств действительных чисел и полная теория их была разработана лишь в XIX в.

3. Теоретические основы иррациональных уравнений и неравенств

Уравнение — это математическое равенство, в котором неизвестна одна или несколько величин. Значение неизвестных нужно найти так, чтобы при их подстановке в пример получилось верное числовое равенство. Корень уравнения — то самое число, которое при подстановке на место неизвестной уравнивает выражения справа и слева.
Решить уравнение- значит найти все возможные корни или убедиться, что их нет.

Неравенство — это алгебраическое выражение, в котором используются знаки ≠, <, >, ≤, ≥. Решить неравенство- значит найти все значения переменной, при которой неравенство верное.

Иррациональными называются уравнения и неравенства, в которых некоторые рациональные функции от неизвестной содержатся под знаком радикала.

Чаще всего иррациональные уравнения и неравенства решаются таким образом:

1. Рассматривают иррациональную функцию; находят область определения функции.
2. Уединяют одно из выражений с корнем в одной части и избавиться от знака корня (возвести в соответствующую степень обе части уравнения и упростить его);
3. Повторяют эту процедуру, пока все корни не уйдут или пока решение не станет очевидным;
4. Решить получившееся рациональное уравнение;
5. Для проверки подставить получившиеся корни уравнения в исходное уравнение.
6. Записывают ответ.
7. Для неравенств на координатной прямой:

- отмечают нули функции, принадлежащие области определения;
- определяют знак функции на каждом промежутке;
- с учетом знака неравенства записывают ответ.

Основные равносильные преобразования:

1) Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.
2) Умножение или деление левой и правой частей уравнения одновременно на нулевое число.

Основные неравносильные преобразования:

1) Освобождение от знаменателей, содержащих переменные.
2) Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

4. Методы решения иррациональных уравнений и иррациональных неравенств.

1. Решение иррациональных уравнений по определению корня.

С помощью определения корня обычно решаются простейшие иррациональные уравнения, т.е. уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые рациональные выражения. Решение таких уравнений зависит от чётности показателя корня. Например,

а) $\sqrt{x^2 - 5} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 22 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{array} \right.$.

б) $\sqrt[4]{x + 2} = -1$ – корней нет, т. к. $-1 < 0$.

в) $\sqrt[3]{2x - 1} = -3 \Leftrightarrow 2x - 1 = (-3)^3 \Leftrightarrow 2x = -26 \Leftrightarrow x = -13$.

2. Возведение в степень иррациональных уравнений.

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень применяется для решения иррациональных уравнений в тех случаях, когда возведение в степень позволяет полностью избавиться от корней в записи иррационального уравнения или, по крайней мере, уменьшить их количество. Например, возведение обеих частей уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ в степень n дает уравнение $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = g^n(x)$, которое в дальнейшем можно преобразовать в уравнение $f(x)=g^n(x)$, не содержащее корня в левой части.

- C≥0. Такими иррациональными уравнениями являются,

  например, $\sqrt{x^2 - 5} = 2$ или $\sqrt[6]{4 - 5 \cdot x} = 0$. Избавиться от знака квадратного корня в первом уравнении позволяет возведение обеих частей уравнения в квадрат: $\sqrt{x^2 - 5} = 2$, $\left(\sqrt{x^2 - 5}\right)^2 = 2^2$, $x^2 - 5 = 4$. Во втором случае от корня шестой степени освобождает возведение обеих частей иррационального уравнения в шестую степень:

  $\sqrt[6]{4 - 5 \cdot x} = 0$, $\left(\sqrt[6]{4 - 5 \cdot x}\right)^6 = 0^6$, $4-5\cdot x=0$.

- $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, например, $\sqrt{1 - 5 \cdot x} = x - 3$, $\sqrt[3]{4 \cdot x - 2x^2 - 1} = x$ и др. В первом случае избавиться от корня позволяет возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат, а во втором случае – в куб.

- $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$. В качестве примера приведем иррациональное уравнение $\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{x + 9}$. Очевидно, возведение обеих частей уравнения в квадрат позволит избавиться от обоих знаков корней.

- $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$, таких как $\sqrt{2 \cdot x + 1} = \sqrt[3]{x + 1}$ и подобных им. Оба корня в записи пропадут после возведения в шестую степень обеих частей приведенного в пример иррационального уравнения.

- иррациональных уравнений с двумя, тремя, редко – четырьмя и большим количеством радикалов в записи, например,

  $\sqrt{x-6}=\sqrt{x+2}-2$ и $\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}=\sqrt{2\cdot x+6}$. Здесь к возведению частей уравнения в степень приходится прибегать неоднократно, причем делать это следует вместе с уединением радикала.

- уравнений с корнем под корнем. Вот пример такого иррационального уравнения $\sqrt[5]{2-\sqrt{x^2+4\cdot x+4}}=-1$. В таких случаях тоже требуется несколько раз прибегать к возведению частей иррационального уравнения в степень.

Примеры:

1. Решить иррациональное уравнение $\sqrt{1-5\cdot x}=x-3$

Например, в котором все корни уравнения, полученного из исходного иррационального уравнения путем возведения его обеих частей в квадрат, оказываются посторонними для исходного уравнения. Вывод: оно не имеет корней.

2. Решить иррациональное уравнение $\sqrt[6]{x^3-5\cdot x+1}=1$

   Его решение требует возведения обеих частей уже не в квадрат, а в шестую степень, и это приведет уже не к линейному или квадратному уравнению, а к кубическому уравнению. Здесь проверка нам покажет, что все три его корня будут корнями иррационального уравнения, заданного изначально.

3. **Решение иррациональных уравнений и неравенств уравнений с использованием замены переменной.**

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример1.

$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33, x\in R.$

Пусть $y=\sqrt{2x^2+3x+9}, y\geq 0,$ *тогда исходное уравнение примет вид:*

$y^2+y-42=0$, *корни которого* $y=6$ *и* $y=-7\notin[0;\infty)$. *Решая уравнение* $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$, *получаем* $x=3$ *и* $x=-4,5.$

Ответ: $\{3;-4,5\}$.

Пример 2

$2x^2 + (2x+1)\sqrt{x^2 - x + 1} = 1, x \in R.$

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования: $x^2 + 2x\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0$.

$(x + \sqrt{x^2 - x + 1})^2 + x + \sqrt{x^2 - x + 1} - 2 = 0.$

Замена $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ приводит уравнение к виду $y^2 + y - 2 = 0,$ корнями которого являются $y = 1$ и $y = -2.$ Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 2} - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x^2 - x + 1 = 1 - 2x + x^2 \\ 1 - x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 = 1 + 4x + 4 \\ -x - 2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x \leq 1 \\ x = -0,6 \\ x \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0.$$

<u>**Ответ:**</u> $\{0\}$.

Пример 3

Решить неравенство

$$\frac{x}{20 - \sqrt{x}} < 10$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x}$ = t; тогда x = t^2 . Наше неравенство принимает вид: $\frac{t^2}{20-t} < 10$

$$\longrightarrow \quad \frac{t^2 + 10t - 200}{t - 20} \quad \longrightarrow \quad \frac{(t-10)(t+20)}{t-20} > 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов и делаем обратную замену:

$$\begin{cases} -20 < t < 10 \\ t > 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 20 < \sqrt{x} < 10 \\ \sqrt{x} > 20 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 100 \\ x > 400 \end{cases}$$

<u>**Ответ:**</u> [0; 100) U (400; +∞).

4. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.

Теорема. Уравнение $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, определенное на всей числовой оси, равносильносовокупности уравнений $\begin{cases} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$

Пример1.

$(x+3)\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x^2 - 1}.$

При $x \geq 1$ уравнение принимает вид: $\sqrt{x-1}(x + 3 - 3\sqrt{x+1}) = 0,$ которое равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{c}\sqrt{x-1}=0\\ x+3-3\sqrt{x+1})=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=1\\ 9(x+1)=x^2+6x+9\\ x\geq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x^2-3x=0\\ x\geq 1\\ x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=0.x=3\\ x\geq 1\\ x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$$

Ответ: $\{1,3\}$.

P.S. Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

Пример 2.

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+2}=0$$

Если внимательно посмотреть на уравнение, то можно увидеть, что разности подкоренных выражений первого и третьего , а также второго и четвертого членов этого уравнения равны одной и той же величине $(-2x-4)$.

В таком случае далее следует воспользоваться тождеством:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, a\geq 0, b\geq 0, a+b>0$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{-2x-4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}=0,$$ или

$$(2x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)=0$$

Корень уравнения $2x+4=0$, т.е. число $x=-2$ при подстановке в исходное уравнение дает верное равенство.

Уравнение $\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}=0$ не имеет решений, так как его левая часть положительна в своей области определения.

Ответ: $\{-2\}$.

5. Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений. (переход к модулям)

При решении некоторых иррациональных уравнений полезна формула $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 1.

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Преобразуем уравнение следующим образом**:**

$$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1,$$

или

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

Обозначим $y=\sqrt{x-1}, y\ge 0$ и решим полученное уравнение методом интервалов**.**

$$|y-2|+|y-3|=1.$$

Разбирая отдельно случаи $y<2, 2\le y<3, y\ge 3$, находим, что решениями последнего уравнения являются $2\le y\le 3$. Возвращаясь к переменной x, получаем неравенства

$$2\le\sqrt{x-1}\le 3$$

$$4\le x-1\le 9$$

$$5\le x\le 10.$$

<u>Ответ</u> $5\le x\le 10.$

6. Метод оценки решения иррациональных уравнений.

Этот способ встречается редко. Он применим в том случае, когда подкоренные выражения представляют собой квадратный трехчлен, не раскладывающийся на линейные множители. Поэтому целесообразно оценить левую и правую части уравнения.

Пример 1.

$$\sqrt{4x^2+8x+8}+\sqrt{3x^2+6x+12}=4-2x-x^2.$$

Оценим обе части уравнения:

$$\sqrt{4(x^2+2x+2)}=\sqrt{4(x+1)^2+4}\ge\sqrt{4}=2,$$

$$\sqrt{3(x^2+2x+4)}=\sqrt{3(x+1)^2+9}\ge\sqrt{9}=3,$$

$$4-2x-x^2=-(x^2+2x-4)=-((x+1)^2-5)=5-(x+1)^2\le 5.$$

Левая часть уравнения существует при всех значениях переменной x, не меньших 5, а правая – при всех значениях, не больших 5, следовательно, уравнение будет иметь решение, если обе части уравнения одновременно равны 5, т. е. справедлива следующая система:

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+8x+8}+\sqrt{3x^2+6x+12}=5\\ 4-2x-x^2=5\end{cases}.$$

Корнем второго уравнения системы является число $x = -1$.

Проверим, является ли это число корнем второго уравнения:

$\sqrt{4-8+8} + \sqrt{3-6+12} = 5$.

<u>Ответ:</u> $\{-1\}$.

7. **Функционально-графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств.**

Функционально-графический метод используется в тех иррациональных уравнениях, когда остальные методы бессильны. Можно выделить три основных направления функционально-графического метода решения иррациональных уравнений:

• использование графиков функций (графический метод);

• использование свойств возрастающих и убывающих функций (использование монотонности функций);

• использование свойств ограниченных функций (метод оценки).

Эти три направления помогают решить подавляющее большинство иррациональных уравнений. Графический метод.

Обычно, этим методом решаются те уравнения, которые невозможно решить другим методом и графики функций, входящих в состав уравнения, являются элементарными или получаются из геометрических преобразований (растяжение, сжатие, смещение, сложение и вычитание).

Алгоритм использования графического метода:

- построить графики функций, входящих в уравнение;

- по взаимному расположению графиков сделать вывод о наличии и количестве корней решаемого уравнения:

а) если графики функций не пересекаются, то уравнение корней не имеет;

б) если графики функций имеют общие точки, то корнями уравнения являются абсциссы этих точек.

Следует учитывать, что, используя графический метод, сложно достичь высокой точности нахождения корней, поэтому, все найденные корни уравнения будут лишь приближёнными, нуждающимися в проверке и обосновании. Для наглядности приведём простой **пример.**

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$

Решение.

Рассмотрим функции $y=f(x)=\sqrt{2x-3}$ и $y=g(x)=4-\sqrt{4x+1}$

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{2x-3}=(2x-3)^{\frac{1}{2}}$ она является степенной; является возрастающей, т.к. показатель степени – положительное (не целое) число.

Найдем область определения функции D(f). $2x-3\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 1{,}5.$

$D(f)=[1{,}5;+\infty)$

Составим таблицу значений x и f(x).

x	1,5	2	3,5	6
$f(x)$	0	1	2	3

2. Функция $g(x)=4-\sqrt{4x+1}=4-(4x+1)^{\frac{1}{2}}$ степенная; является убывающей.

Найдем область определения функции D(g).

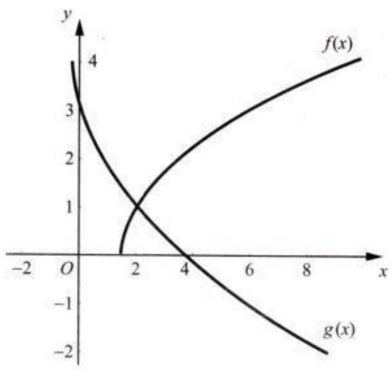
$4x+1\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{4}.$

$D(g)=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$

Составим таблицу значений x и g(x).

x	$-\frac{1}{4}$	0	2	6
$g(x)$	4	3	1	-1

Построим данные графики функций в одной системе координат.



Графики функций пересекаются в точке с абсциссой $x=2.$ Т.к. функция f(x) возрастает, а функция g(x) убывает, то решение уравнения будет только одно.

Ответ: 2.

8. Решение иррациональных неравенств методом интервалов.

Эффективным методом решения иррациональных неравенств является метод интервалов.

Пример 1 – решить неравенства методом интервалов:

а) $\sqrt{7-x} > x-1$ б) $\sqrt{7-x} < x-1$

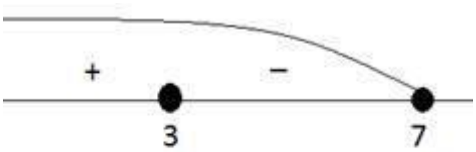
согласно методу интервалов, необходимо временно отойти от неравенства. Для этого перенести в заданном неравенстве все в левую часть (получить справа ноль) и ввести функцию, равную левой части: $y = \sqrt{7-x} - x + 1$

теперь необходимо изучить полученную функцию. ОДЗ: $7 - x \geq 0 \leftrightarrow x \leq 7$

Корни: $y = 0 \leftrightarrow \sqrt{7-x} = x - 1 \leftrightarrow x = 3$

Данное уравнение мы уже решали графически, поэтому не останавливаемся на определении корня.

Теперь необходимо выделить интервалы знакопостоянства и определить знак функции на каждом интервале:



Напомним, что для определения знаков на интервале необходимо взять пробную точку и подставить ее в функцию, полученный знак функция будет сохранять на всем интервале.

$y(0) = \sqrt{7} + 1 > 0; y(6) = \sqrt{1} - 5 < 0$. Проверим значение в граничной точке:

$y(7) = \sqrt{0} - 6 < 0$ Очевиден **<u>ответ:</u>** а) $x \in (-\infty; 3)$; б) $x \in (3; 7]$

1. $\sqrt{x-5} < 1$ равносильно $\sqrt{x-5} - 1 < 0$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию $f(x) = \sqrt{x-5} - 1$ и найдем область определения

$x - 5 \geq 0$ $x \geq 5$ - область определения

Шаг 2. Вычислим нули функции

$$\sqrt{x-5}-1=0$$

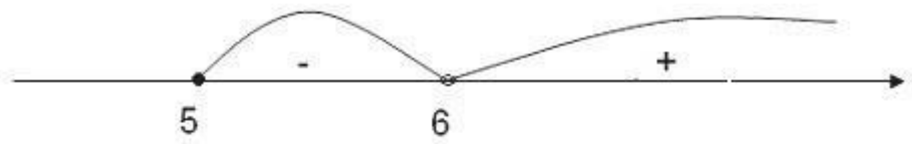
$$\sqrt{x-5}=1$$

$$(\sqrt{x-5})^2=1^2$$

$$x-5=1$$

$x=6$ - нуль функции

Шаг 3. На координатной прямой отмечаем нуль функции принадлежащий области определения. Получается два промежутка: [5;6) и (6;+∞). Определяем знак функции на каждом промежутке. Выписываем промежуток, на котором $f(x)<0$



$f(5.5)=\sqrt{5.5-5}-1=\sqrt{0.5}-1<0$

$f(7)=\sqrt{7-5}-1=\sqrt{2}-1>0$

__**Ответ:**__ $x\in[5;6)$

2. $\sqrt{x+7}>x+1$ равносильно $\sqrt{x+7}-x-1>0$

Шаг 1. Рассмотрим иррациональную функцию $f(x)=\sqrt{x+7}-x-1$, найдем область определения

$x+7\geq 0$

$x\geq -7$ - область определения

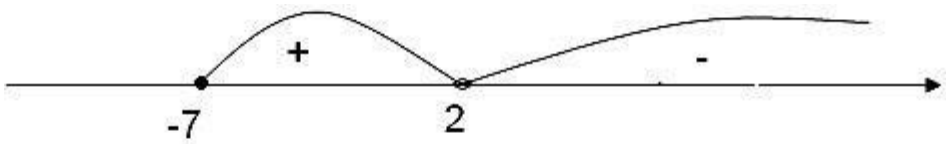
Шаг 2. Вычислим нули функции $\sqrt{x+7}-x-1=0$

$$\sqrt{x+7}=x+1$$

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ (\sqrt{x+7})^2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x+7=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x_1=-3; x_2=2 \end{cases}$$

$x=2$ - нуль функции

Шаг 3. На координатной прямой отмечаем нуль функции, принадлежащий области определения. Получаем два промежутка [-7;2) и (2;+∞). Определяем знак функции на каждом промежутке. Выписываем промежуток на котором $f(x)>0$.



$f(-6)=\sqrt{-6+7}-(-6)-1=1+6-1=6>0$

$f(9)=\sqrt{9+7}-9-1=4-10=-6<0$

Ответ: $x\in[-7;2)$

5. Заключение

В данной работе рассмотрены основные методы и приемы решения различных иррациональных уравнений и неравенств в школе. Подробно описаны ситуации, связанные с потерей или приобретением посторонних корней в процессе решения, показано, как распознавать и предотвращать их. Подобраны примеры решения иррациональных уравнений и неравенств для демонстрации излагаемого теоретического материала. Сделана попытка разработать методику обучения решению иррациональных уравнений и неравенств в школе.

Проведенное исследование показало, что в средней школе недостаточное внимание уделяется методам решения различных иррациональных уравнений, в основном, программой предусмотрено формирование у учащихся способности решать простейшие иррациональные уравнения и неравенства. К сожалению, на изучение этой темы в программе средней школы отводится минимум часов, что не соответствует объему необходимого для усвоения материала, иррациональные неравенства изучаются только в ознакомительном порядке. Данные факты обуславливают необходимость проведения элективных курсов, математических кружков, с целью освоения обучающимися умения различать основные виды иррациональных уравнений и неравенств, умения применять необходимые приемы и методы их решения необходимо для решения иррациональных уравнений и неравенств на сознательной основе.

6. Список литературы

1. Использование сайтов:
    - https://urok.1sept.ru/articles/514238
    - https://gigabaza.ru/doc/120804-pall.html
    - https://obuchalka.org/2015012782009/irracionalnie-uravneniya-i-neravenstva-shahmeister-a-h-2011.html
    - https://www.algebraclass.ru/zamena-peremennoj-v-irracionalnyx-uravneniyax/
    - http://www.cleverstudents.ru/equations/solving_irrational_equations_byfactorization.html
    - https://math-ege.sdamgia.ru
2. Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. С-Петербург., Изд. МЦНМО, 2011г
3. Учебник 10 класс А.Г. Мерзляк «Алгебра и начала анализа».

7. Практическая часть.

Решить уравнения (иррациональные):

1. $\sqrt{2x^2-3x-5} = x-1$

возводим обе части в квадрат.

$\left(\sqrt{2x^2-3x-5}\right)^2 = (x-1)^2$

$\begin{cases} 2x^2-3x-5 = x^2-2x+1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-6=0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Решим уравнение

$x^2-x-6=0$

По теореме Виета

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \text{ (посторон.)} \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \text{ (посторонний)} \\ x_2 = 3 \end{array}\right. \\ x \geq 1 \end{cases}$

Ответ: 3

2. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3} = x+1$

возведем обе части в куб

$\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}\right)^3 = (x+1)^3$

$\cancel{x^3}+4x^2+\cancel{3x}-3 = \cancel{x^3}+3x^2+\cancel{3x}+1$

$x^2=4$

$x = \sqrt{4}$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$

Ответ: -2; 2.

3. $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{5x - 1\frac{1}{4}}$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ 5x - 1\frac{1}{4} \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

возводим обе части в квадрат

$\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2 = \left(\sqrt{5x - 1\frac{1}{4}}\right)^2$

$x^2-4 = 5x - 1\frac{1}{4}$

$x^2-5x-\frac{11}{4}=0.$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 5{,}5 \\ x_2 = -0{,}5 \text{ (посторон.)} \end{array}\right.$

Решим уравнение: $\boxed{D = b^2-4a\cdot c.}$

$x^2-5x-\frac{11}{4}=0.$

$D = 25 + 4\cdot\frac{11}{4} = 36$

$x = \frac{5 \pm 6}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = 5{,}5 \\ x_2 = -0{,}5 \text{ (посторон.)} \end{array}\right.$

Ответ: 5,5.

4. $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}} - 6 = 0.$

ОДЗ: $x-2>0$
$x>2$

возводим в одну степень:

$(x+6)^2=(6\sqrt{x-2})^2$

$x^2+12x+36=36(x-2)$

$x^2+12x+36=36x-72$

$x^2-24x+108=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=18 \\ x_2=6 \end{array}\right.$

Ответ: 6; 18.

Решим уравнение:

$x^2-24x+108=0$

$D=576-432=144$

$x=\dfrac{24\pm\sqrt{144}}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x_1=18 \\ x_2=6 \end{array}\right.$

5. $\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x+1}=0$

ОДЗ:

$\begin{cases} 2x+1\geqslant 0 \\ x\geqslant -0{,}5 \end{cases}$

Возводим в шестую степень обе части:

$(\sqrt{2x+1})^6=(\sqrt[3]{x+1})^6$

$(2x+1)^3=(x+1)^2$

$8^3+12x^2+6x+1=x^2+2x+1$

$8x^3+11x^2+4x=0$

$x(8x^2+11x+4)=0$

$\begin{cases} x=0 \\ 8x^2+11x+4=0 \end{cases}$

Решим уравнение:

$8x^2+11x+4=0$

$D=121-128=-7$

$D<0$ – корней нет

Ответ: 0.

6. $2\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{1-2x+\sqrt{2x(1+2x)}}$

Возводим обе части в квадрат:

$4(1+2x)+4\sqrt{(1+2x)(1-2x)}+1-2x=1-2x+\sqrt{2x(1+2x)}$

$\sqrt{1+2x}\cdot(4\sqrt{1+2x}+4\sqrt{1-2x}-\sqrt{2x})=0$

$\left[\begin{array}{l} x=+\frac{1}{2} \\ 4\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{2x} \text{ (возводим в квадрат)} \end{array}\right.$

$16(1+2x+4\sqrt{1-4x^2}+1-2x)=2$

$\sqrt{1-4x^2}=\frac{x}{16}-1$ (возводим в квадрат) ; $\begin{cases} \frac{x}{16}-1\geqslant 0. \\ x\leq -16 \end{cases}$

$1-4x^2=\dfrac{x^2-32x+16^2}{16^2}$

$1025x^2-32x=0$.

$x(1025x-32)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=+\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=0 & \text{(посторон.)} \\ x=\frac{32}{1025} & \text{(посторон.)} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $+\frac{1}{2}$

7. $(16-x^2)\sqrt{3+x}=0$

$$\begin{cases} x+3\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 16-x^2=0 \\ 3+x=0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \text{ (посторон.)} \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $-3; 4$.

8. $x=1-\sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}$

$$\sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}=1-x \iff \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ 1-x\sqrt{x^2+16}=x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 1 \\ x\sqrt{x^2+16}-2+x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+16}=2-x \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ x^2+16=4-4x+x^2 \end{cases} \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leq 2 \\ x=-3 \end{cases} \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $-3; 0$.

9. $2\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}}+3\sqrt{\frac{4+x}{3x+2}}=5$

Пусть $\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}}=t\geq 0$, тогда:

$2t+\frac{3}{t}=5$

$2t+\frac{3}{t}-5=0$

Решим уравнение $2t+\frac{3}{t}-5=0$.

$t=\frac{5\pm 1}{4}$; $\left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3x+2}{4+x}}=1 \\ \sqrt{\frac{3x+2}{4+x}}=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$ (возводим обе части в квадрат).

$$\left[\begin{array}{l}\frac{3x+2}{4+x}=\frac{1}{1}\\ \frac{3x+2}{4+x}=\frac{9}{4}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}3x+2=4+x\\ 12x+8=36+9x\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x=2\\ 3x=28\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=9\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $1;\ 9\frac{1}{3}$.

10.

$$\sqrt{|x-5|}=x-3.$$

возводим в квадрат:

$$\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ |x-5|=(x-3)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant 3\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 5 \text{ при } (|x-5|=x-5)\\ x-5=x^2-6x+9\end{cases}\\ \begin{cases}x<5 \text{ при } (|x-5|=5-x)\\ 5-x=x^2-6x+9\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 3\\ x\geqslant 5\\ x^2-7x+14=0 \quad (D<0 \text{ - корней нет})\end{cases}\\ \begin{cases}x\geqslant 3\\ x<5\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x\geqslant 3\\ x<5\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=1 \text{ (постор.)}\end{array}\right.\end{cases}$$

Ответ: 4.

11.

$$\sqrt{|x-8|}=x-2$$

По свойству модуля $|a|^2=a^2$, имеем

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\ |x-8|=(x-2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 2\\ (|x-8|)^2=(x-2)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant 2\\ ((x-2)^2-(x-8))((x-2)^2+x-8)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-4x+4-x+8=0\\ x^2-4x+4+x-8=0\end{array}\right.\\ x\geqslant 2\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-5x+12=0 \quad (D<0 \text{ - нет корней})\\ x^2-3x-4=0\end{array}\right.\\ x\geqslant 2\end{cases}$$

Решим уравнение:

$x^2-3x-4=0$.

По теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l}x_1=4\\ x_2=-1\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=4\\ x_2=-1 \text{ (посторон.)}\end{array}\right.\\ x\geqslant 2\end{cases}$$

Ответ: 4.

12. $x^2-5x+6=4(x-2)\cdot\sqrt{x}$

разложение на множители

$(x-2)(x-3)-4(x-2)\cdot\sqrt{x}=0$

$(x-2)(x-3-4\sqrt{x})=0$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ x-3-4\sqrt{x}=0\end{array}\right.\\ x\geqslant0\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ 4\sqrt{x}=x-3\end{array}\right.\\ x\geqslant0\\ x-3\geqslant0\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ (4\sqrt{x})^2=(x-3)^2\end{array}\right.\\ x\geqslant0\\ x\geqslant3\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ 16x=x^2-6x+9\end{array}\right.\\ x\geqslant3\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x^2-22x+9=0\end{array}\right.\\ x\geqslant3\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=11-\sqrt{112}\ \text{(посторон.)}\\ x=11+\sqrt{112}\end{array}\right.\\ x\geqslant3\end{cases}$

Ответ: $2;\ 11+\sqrt{112}$.

13.

$2x\sqrt[6]{x^5}+x\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}-2=0$ (разложение на множители)

т.к. $\sqrt[6]{x^5}=\sqrt[6]{x^3\cdot x^2}=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^2}=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$

тогда

$\underline{2x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}}-\underline{\underline{4\sqrt[3]{x}-2}}$ (группировка)

$x\sqrt{x}(2\sqrt[3]{x}+1)-2(2\sqrt[3]{x}+1)=0$

$(2\sqrt[3]{x}+1)(x\sqrt{x}-2)=0$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\sqrt[3]{x}+1=0\\ x\sqrt{x}-2=0\end{array}\right.\\ x\geqslant0\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=-\frac{1}{2}\\ x^3=4\end{array}\right.\\ x\geqslant0\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{8}\ \text{(посторон.)}\\ x=\sqrt[3]{4}\end{array}\right.\\ x\geqslant0\end{cases}$

Ответ: $\sqrt[3]{4}$

14.

$\sqrt[3]{2-3x}+\sqrt[3]{3x+5}=1$

возводим в куб: $\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

$(2-3x)+(3x+5)+3\sqrt[3]{2-3x}\cdot\sqrt[3]{3x+5}\cdot(\sqrt[3]{2-3x}+\sqrt[3]{3x+5})=1$

$\sqrt[3]{2-3x}\cdot\sqrt[3]{3x+5}\cdot(\underbrace{\sqrt[3]{2x-3x}+\sqrt[3]{3x+5}}_{=1})=-2$

$\Downarrow$

$\sqrt[3]{(2-3x)(3x+5)}=-2$

возведем в куб.

$$\left(\sqrt[3]{(2-3x)(3x+5)}\right)^3=(-2)^3$$

$$(2x-3)(3x+5)=-8$$

$$9x^2+9x-18=0$$

Решим уравнение:

$$9x^2+9x-18=0.$$

$$D=81+648=729$$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{729}}{18}; \quad \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; 1$.

15.

$$(x+3)\sqrt{x-1}=3\sqrt{x^2-1} \quad \text{(разложить на множители)}$$

$$(x+3)\cdot\sqrt{x-1}-3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=0$$

$$\sqrt{x-1}\cdot(x+3-3\sqrt{x+1})=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=0 \\ x+3-3\sqrt{x+1}=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 3\sqrt{x+1}=x+3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 9(x+1)=(x+3)^2 \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 9x+\cancel{9}=x^2+6x+\cancel{9} \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-3x=0 \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x(x-3)=0 \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \text{ (посторон.)} \\ x=3 \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Ответ: $1; 3$.

16. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}=x^4+2$ $\qquad D(y): 1-x^2\geq 0$

$D(y): [-1; 1]$.

Возводим в квадрат:

$$1+x^2+2\sqrt{1-x^4}+1-x^2=(x^4+2)^2$$

$$2+2\sqrt{1-x^2}=(x^4+2)^2$$

Пусть $x^4+2=t>0$, тогда

$$1-x^4=3-t$$

Получим:

$$2\sqrt{3-t}=t^2-2 \iff \left\{\begin{array}{l} 4(3-t)=(t^2-2)^2 \\ t^2-2\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} t^4-4t^2+4t-8=0 \\ t^2\geq 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} t^2(t^2-4)+4(t-2)=6 \\ t^2\geq 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases}(t-2)(t^3+2t^2+4)=0\\ t^2 \geq 2\end{cases}$$

Т.к. $t>0$, то $t^3+2t^2+4>0 \Rightarrow t=2$

$$\begin{cases}t=2\\ t^2 \geq 2\end{cases}$$ (возвращаясь к переменной x, получаем):

$$\begin{cases}x^4+2=2\\ x^2 \leq 1\end{cases} \qquad x=0$$

Ответ: 0.

17.

$$2\cdot\sqrt{x+4}-1=\sqrt[3]{2\cdot x}$$

решим графическим способом:

рассмотрим функции:

$y=2\cdot\sqrt{x+4}-1$

$y=\sqrt[3]{2\cdot x}$

Для функции:

$y=2\cdot\sqrt{x+4}-1$

$(x \geq -4)$

Для функции:

$y=\sqrt[3]{2\cdot x}$

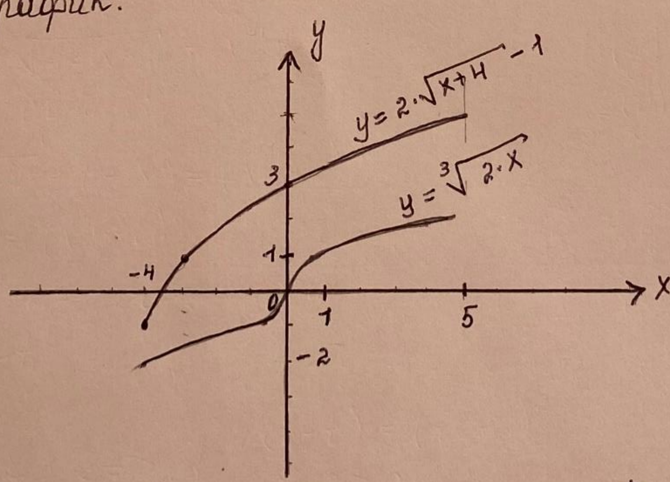
(x – любое)

Составим таблицу значений:

x	-4	-3	0	5
$y=2\cdot\sqrt{x+4}-1$	-1	1	3	5

x	-4	$-0,5$	0	$0,5$	4
$y=\sqrt[3]{2\cdot x}$	-2	-1	0	1	2

Построим график:



Из графика мы видим, что пересечений нет.

Ответ: решения нет

Решить иррациональные неравенства:

1. $\sqrt{5x+6} < -x$

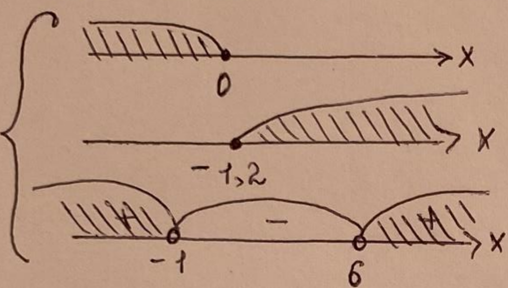
$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 5x+6 \geq 0 \\ 5x+6 < x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -1{,}2 \\ x^2-5x-6 > 0 \end{cases}$$

Решим уравнение: $x^2-5x-6=0$

по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -1{,}2 \\ (x-6)(x+1) > 0 \end{cases}$$



Ответ: $[-1{,}2; -1)$

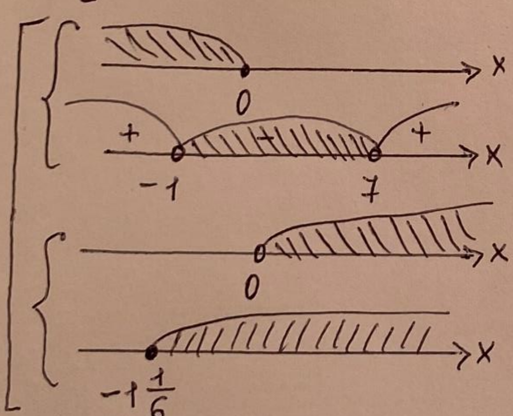
2. $\sqrt{6x+7} > -x$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x \geq 0 \\ 6x+7 > (-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -x < 0 \\ 6x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-6x-7 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x \geq -1\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим уравнение: $x^2-6x-7=0$

по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -1 \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0 \\ (x-7)(x+1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x \geq -1\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1; +\infty)$

3. $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$

(по св-ву корня)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-3x+2 > (x+3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 < 0 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

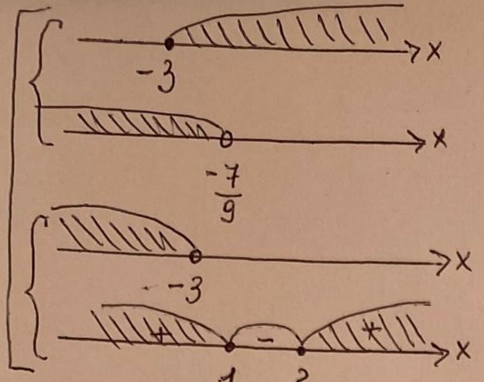
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

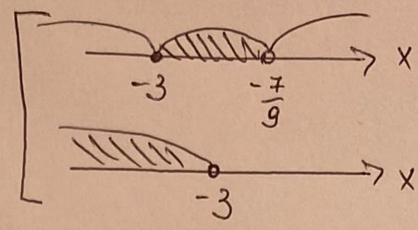
Решим уравнение: $x^2-3x+2=0$

по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$



или



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$

4.

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$$

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}$$

$$\begin{cases} 4-\sqrt{1-x} \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4-\sqrt{1-x} > 2-x \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{1-x} \leq 4 \\ x \leq 2 \\ \sqrt{1-x} < 2+x \end{cases}$$

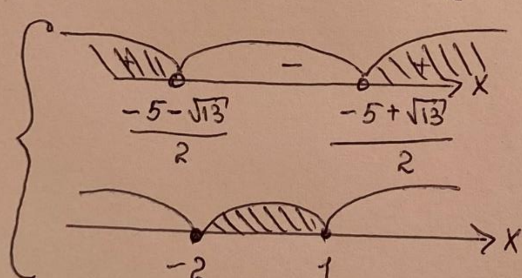
$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-x \leq 16 \\ x \leq 2 \\ 2+x \geq 0 \\ 1-x < (2+x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-x \leq 16 \\ x \leq 2 \\ 2+x \geq 0 \\ x^2+5x+3 > 0 \end{cases}$$

Решим уравнение:

$x^2+5x+3=0$

$D = 25-12 = 13$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$



Ответ: $\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; 1\right]$.

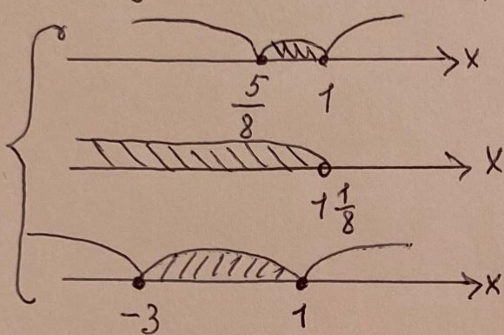
5.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 8x-5 \geq 0 \\ x+3+2\sqrt{(x+3)(1-x)}+1-x > 8x-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{5}{8} \\ x \leq 1 \\ 2\sqrt{(x+3)(1-x)} > 8x-9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{5}{8} \le x \le 1 \\ 8x - 9 < 0 \\ 4(x+3)(1-x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5}{8} \le x \le 1 \\ 8x - 9 > 0 \\ 4(x+3)(1-x) > (8x-9)^2 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right.$$

Последняя система неравенств решений не имеет.



Ответ: $\left[\frac{5}{8}; 1\right]$.

6. $\sqrt{|1-8x|-2} \le x+1$

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ |8x-1| \ge 2 \\ |8x-1| - 2 \le x^2 + 2x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge -1 \\ |8x-1| \ge 2 \\ |8x-1| \le x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

Раскроем модули:

$$\begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} 8x - 1 \ge 2 \\ 8x - 1 \le -2 \end{array}\right. \\ 8x - 1 \le x^2 + 2x + 3 \\ 8x - 1 \ge -x^2 - 2x - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \frac{3}{8} \\ x \le -\frac{1}{8} \end{array}\right. \\ x^2 - 6x + 4 \ge 0 \\ x^2 + 10x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим уравнения:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$.

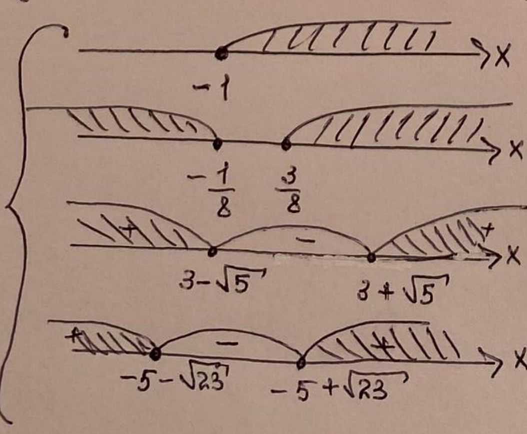
$D = 36 - 16 = 20$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 + \sqrt{5} \\ x = 3 - \sqrt{5} \end{array}\right.$$

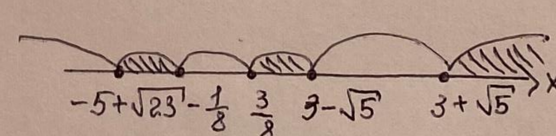
2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

$D = 100 - 8 = 92$

$$\left[\begin{array}{l} x = -5 + \sqrt{23} \\ x = -5 - \sqrt{23} \end{array}\right.$$



или

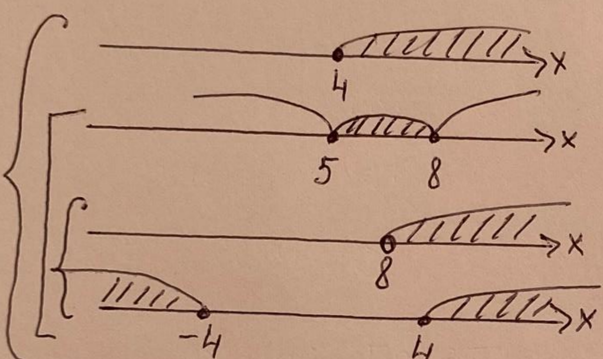


Ответ: $\left[-5+\sqrt{23}; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8}; 3-\sqrt{5}\right) \cup \left[3+\sqrt{5}; +\infty\right)$.

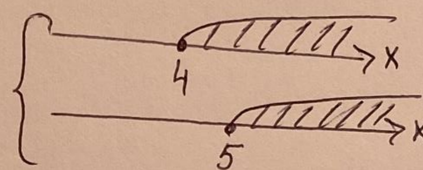
7. $$\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} \geq \frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

$$\begin{cases} x^2-16 \geq 0 \\ x-3 > 0 \\ \sqrt{x^2-16} + x - 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x^2-16} \geq 8-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x^2-16 \geq 64-16x+x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 8-x < 0 \\ x^2-16 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 8 \\ (x-4)(x+4) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$



или.



Ответ: $[5; +\infty)$.

8. $$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} \leq 1$$

Пусть $\sqrt{x+1} = t \geq 0$, тогда

$x+1 = t^2$; $x+2 = t^2+1$; $x+5 = t^2+4$.

$$\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+1-2t} \leq 1$$

выделим полный квадрат:

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow |t-2| + |t-1| \leq 1$$

1) если $\begin{cases} t \leq 1 \\ 2-t+1-t \leq 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow t = 1$

2) если $\begin{cases} 1 < t \leq 2 \\ 2-t+t-1 \leq 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} 1 < t \leq 2 \\ 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < t \leq 2$

3) если $\begin{cases} t > 2 \\ t-2+t-1 \leq 1 \end{cases}$, то $\begin{cases} t > 2 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет

Возвращаясь к переменной x, получаем:

1) если $\sqrt{x+1} = 1$, то $x = 0$

2) если $1 < \sqrt{x+1} \leq 2$, то $0 < x \leq 3$

Ответ: $[0; 3]$.